Solution of Interesting Math Problems

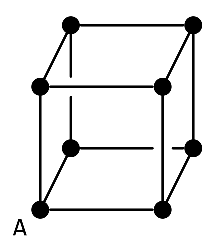
Fans of Leaf God

“先有强哥后有天，知易道君还在前”

1 2022.5.26 立方体随机游走 (Easy Version)

对于如图所示的立方体，在 0 时刻 A 点有一只胖蜗牛，相邻时刻间胖蜗牛会在相邻的三个立方体节点中均匀随机一个，作为下一时刻的位置。

令 p_n 表示对于时刻 n，胖蜗牛出现在 A 点的概率，求 p_n 的通项公式。



1.1 解析

对立方体节点黑白染色，可得 $\forall\, k,\ 2 \nmid k$，有 $p_k = 0$。

定义 $a_n = \begin{cases} \text{该时刻出现在 A 点的概率} & (2 \mid n) \\ \text{该时刻出现在 A 点周围的三个点的概率} & (2 \nmid n) \end{cases}$。

由古典概型推得 $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{3}a_{n-2}$，化用二阶线性递推的通用方法即可得解。

1.2 附件

Leaf God 提供的 Python 程序，可用于计算单点的 p_n 值。

```
n = int(input())
p = [0] * 8
p[0] = 1
r = [0] * 8
for i in range(n):
    for j in range(8):
        for k in range(3):
            r[j ^ (1 << k)] += p[j] / 3
    for j in range(8):
        p[j] = r[j]
        r[j] = 0
print(p[0])
```

2 2022.5.27 一个超级简单的数列题

设数列 $\{a_n\}$ 满足：若 $n=2k-1\,(k\in\mathbb{N}^*)$，$a_n=n$；若 $n=2k\,(k\in\mathbb{N}^*)$，$a_n=a_k$。

1. 若 $S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2^n-1}+a_{2^n}$，求证：$S_n=4^{n-1}+S_{n-1}\,(n\geq 2)$。
2. 证明：$\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\ldots+\dfrac{1}{S_n}<1-\dfrac{1}{4^n}$。

2.1 解析

1. $$\begin{aligned}S_n&=(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2^n-3}+a_{2^n-1})+(a_2+a_4+a_6+\ldots+a_{2^n-2}+a_{2^n})\\&=(1+3+5+\ldots+(2^n-3)+(2^n-1))+(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2^{n-1}-1}+a_{2^{n-1}})\\&=4^{n-1}+S_{n-1}\end{aligned}$$
2. 可得 S_n 通项公式为 $S_n=\dfrac{4^n+2}{3}$，简单放缩：$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{3}{4^n+2}<\dfrac{3}{4^n}$。

$$\text{原式}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4^n}=1-\frac{1}{4^n}$$

3 2022.5.28 一个有点意思的数列题

设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n^2-a_n-\dfrac{5}{4}$。记 $b_n=\dfrac{2a_n-1+\sqrt{4a_n^2-4a_n-15}}{4}$。

1. 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，并据此写出 $\{a_n\}$ 的通项公式。

2. 设各项都为整数的数列 $\{c_n\}$ 满足：$c_n \le a_n < c_n + 1, n \in \mathrm{N}^*$ ，记 $d_n = \dfrac{c_n}{c_{n+1}-1}$，证明：

$$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n < \frac{4}{3}, \quad n \in \mathrm{N}^*$$

3.1 解析

1. 由 $b_n = \dfrac{2a_n - 1 + \sqrt{4a_n^2 - 4a_n - 15}}{4}$ 可推得 $a_n = b_n + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{2}$ 。

   代入 $a_{n+1} = a_n^2 - a_n - \dfrac{5}{4}$ 得 $a_{n+1} = b_{n+1} + \dfrac{1}{b_{n+1}} + \dfrac{1}{2} = \left(b_n + \dfrac{1}{b_n}\right)^2 - \dfrac{3}{2}$ 。

   配方得 $\left(\sqrt{b_{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{b_{n+1}}}\right)^2 = \left(b_n + \dfrac{1}{b_n}\right)^2$，有 $b_n > 0$，故 $b_{n+1} = b_n^2$。

   代入 $a_1 = 3$ 得 $b_1 = 2$，可得 b_n 通项公式为 $b_n = 2^{2^{n-1}}$，代入得 $a_n = 2^{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^{2^{n-1}}} + \dfrac{1}{2}$ 。

2. 不难发现 $c_n = \begin{cases} 2^{2^{n-1}} + 1 & (n = 1) \\ 2^{2^{n-1}} & (n \ge 2) \end{cases}$ ，只需消除掉首项的影响 $\dfrac{1}{3}$，即可令 $c_n = 2^{2^{n-1}}$ 。

   即证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^{n-1}}{2^{2n}-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2n-1} - \dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}} < 1, \quad n \in \mathrm{N}^*$$

   注意到 $d_1 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{4 - \dfrac{2}{4} - 1}{4 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{2^{2^n} - \dfrac{2}{2^{2^n}} - 1}{2^{2^n} - \dfrac{1}{2^{2^n}}}$ ，归纳证明：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} d_i &= \frac{2^{2^{n-1}} - \dfrac{2}{2^{2^{n-1}}} - 1}{2^{2^{n-1}} - \dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}} + \frac{1}{2^{2^{n-1}} - \dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}} \\ &= \frac{\left(2^{2^{n-1}} - \dfrac{2}{2^{2^{n-1}}}\right)\left(2^{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)}{\left(2^{2^{n-1}} - \dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)\left(2^{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)} \\ &= \frac{2^{2^n} - \dfrac{2}{2^{2^n}} - 1}{2^{2^n} - \dfrac{1}{2^{2^n}}} < 1 \end{aligned}$$

原命题得证。

3.2 来源

知乎用户 Way，原文链接：https://zhuanlan.zhihu.com/p/506311927。

第 2. 小问做法由笔者提供。

4 2022.5.29 一道供题人自己做错的简单概率题

对于一个魔方，定义一次随机拧角操作为随机顺时针或逆时针旋转一个角块，问 n 次后此魔方能被还原的概率。

原命题等价于，定义变量 X 的初始值为 0，每次随机拧角将分别有 $\dfrac{1}{2}$ 的概率将 X 加上 1 或 -1，若 n 次拧角后魔方能被还原，则 $X \equiv 0 \pmod 3$ 。

4.1 解析

注意到模 3 余 1 的情况和模 3 余 -1 的情况是对称的，我们可以将原题做以下转化：

- 若当前魔方是可还原的（下面用 0 表示），则经过一次随机拧角后一定是不可还原的
- 若当前魔方是不可还原的（下面用 1 表示），则经过一次随机拧角后，有 $\frac{1}{2}$ 的概率变为可还原的，还有 $\frac{1}{2}$ 的概率变为不可还原的。

定义 $\{a_{i,j}\}$ 来表示状态，有 $a_{0,0}=1, a_{0,1}=0$ ，

$$\begin{cases} a_{n,0} &= \dfrac{1}{2}a_{n-1,1} \\ a_{n,1} &= a_{n-1,0}+\dfrac{1}{2}a_{n-1,1} \end{cases}$$

注意到 $a_{n,0}+a_{n,1}=1$ ，故 $a_{n,0}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}a_{n-1,0}$ ，待定系数法得 $a_{n,0}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}(a_{n-1,0}-\dfrac{1}{3})$ 。

从而得到 $a_{n,0}$ 的通项公式 $a_{n,0}=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{1}{3}$ 即为答案。

4.2 来源

507 班董阳同志友情提供题目和一个错误的解法。

5 2022.5.30 一个可能不是数列题的数列题

已知正整数 $m \geq 3$，设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_m = 0$，$a_{n+1} = a_1 \ln a_n$ $(1 \leq n \leq m-1)$ 。证明：

1. $a_2 \leq \frac{a_1^2}{e}$
2. $e - \frac{e-1}{m-2} < a_1 < e$

5.1 解析

1. 代入递推式得原命题即

$$\ln a_1 \leq \frac{a_1}{e}$$

   可用求导证明。

2. 假设 $a_1 \geq e$，归纳：

$$a_{n+1} = a_1 \ln a_n \geq a_1 \geq e$$

   故 $a_m \geq e \neq 0$，与题设矛盾。证得 $a_1 < e$。

   考虑证明等式左侧，等价于证

$$\frac{\frac{1}{e} - 1}{m-2} < \frac{a_1}{e} - 1$$

   由 $\ln x \leq x - 1$ ，即证

$$\frac{1}{e} - 1 < (m-2)\ln\left(\frac{a_1}{e}\right)$$

   类似于第一问的证明，可以得到：

$$a_n \leq \frac{a_1 a_{n-1}}{e} \leq \frac{a_1^2 a_{n-2}}{e^2} \leq \ldots \leq \frac{a_1^n}{e^{n-1}}$$

   由 $a_m = 0$，有 $a_{m-1} = 1$，$a_{m-2} = e^{\frac{1}{a_1}}$ ，将 $n = m-2$ 代入上式，得

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{a_1}} &\leq \frac{a_1^{m-2}}{e^{m-3}} \\ e^{\frac{1}{a_1}-1} &\leq \left(\frac{a_1}{e}\right)^{m-2} \\ \frac{1}{a_1} - 1 &\leq (m-2)\ln\left(\frac{a_1}{e}\right) \end{aligned}$$

由于上文已证 $a_1 < e$，故 $\dfrac{1}{a_1} > \dfrac{1}{e}$，原命题得证。

5.2 来源

知乎用户 Way，原文链接：https://zhuanlan.zhihu.com/p/506311927。

第 2. 小问做法由笔者提供。