

Interesting Math Problems

Fans of Leaf God 🍃

“先有强哥后有天，知易道君还在前”

一个某人不会做的导数题

 2022.5.24

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a(x - \ln x)$ 。

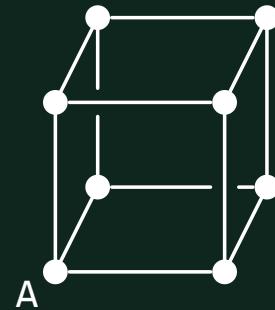
1. 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$ ，求实数 a 的取值范围。
2. 若在满足上一问的条件下，不等式 $f(x_1) - f(x_2) > b(x_1^2 - x_2^2)$ 恒成立，求实数 b 的取值范围。

立方体随机游走 (Easy Version)

2022.5.26

对于如图所示的立方体，在 0 时刻 A 点有一只胖蜗牛，相邻时刻间胖蜗牛会在相邻的三个立方体节点中均匀随机一个，作为下一时刻的位置。

令 p_n 表示对于时刻 n ，胖蜗牛出现在 A 点的概率，求 p_n 的通项公式。



一个超级简单的数列题

 2022.5.27

设数列 $\{a_n\}$ 满足：若 $n = 2k - 1 (k \in \mathbb{N}^*)$ ， $a_n = n$ ；若 $n = 2k (k \in \mathbb{N}^*)$ ， $a_n = a_k$ 。

1. 若 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2^n-1} + a_{2^n}$ ，求证： $S_n = 4^{n-1} + S_{n-1} (n \geq 2)$ 。

2. 证明： $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \dots + \frac{1}{S_n} < 1 - \frac{1}{4^n}$ 。

一个有点意思的数列题

2022.5.28

by 知乎用户 Way

设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2 - a_n - \frac{5}{4}$ 。

记 $b_n = \frac{2a_n - 1 + \sqrt{4a_n^2 - 4a_n - 15}}{4}$ 。

- 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，并据此写出 $\{a_n\}$ 的通项公式。
- 设各项都为整数的数列 $\{c_n\}$ 满足: $c_n \leq a_n < c_n + 1, n \in \mathbb{N}^*$ ，记
 $d_n = \frac{c_n}{c_{n+1} - 1}$ ，证明:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n < \frac{4}{3}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

一道供题人自己做错的简单概率题

 2022.5.29

 by 507 董阳

对于一个魔方，定义一次随机拧角操作为随机顺时针或逆时针旋转一个角块，问 n 次后此魔方能被还原的概率。

原命题等价于，定义变量 X 的初始值为 0，每次随机拧角将分别有 $\frac{1}{2}$ 的概率将 X 加上 1 或 -1，若 n 次拧角后魔方能被还原，则 $X \equiv 0 \pmod{3}$ 。

一个可能不是数列题的数列题

2022.5.30

by 知乎用户 Way

已知正整数 $m \geq 3$ ，设数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_m = 0$ ， $a_{n+1} = a_1 \ln a_n$
($1 \leq n \leq m-1$)。证明：

$$1. a_2 \leq \frac{a_1^2}{e}$$

$$2. e - \frac{e-1}{m-2} < a_1 < e$$

一道课后习题

 2022.6.2

已知 $2bx^2 + 3ax - 2b - 3 \leq 0$ 对于所有 $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 恒成立，求 $a + b$ 的最小值。

formatted by Markdeep 1.13 🖊